

Information Geometric Regularization による浅水流方程式の高次精度化



永野雄一
織田幸伸

研究背景

極端な降雨による急激な河川水位上昇

- 気候変動を要因とする短期間での集中的な豪雨による浸水被害が世界的に多発
- ヨーロッパでは“walls of water”と表現される河川での鉄砲水現象が増加
 - 急激に水位を増す段波状の現象について，既存の設計洪水評価や予測の手法では十分に対処できない（Archerら(2024)）

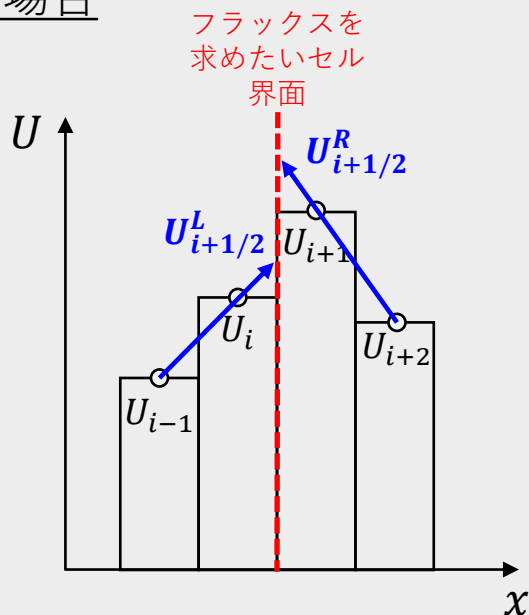
このような河川流れの解析には段波の水面形をシャープに保つことができる空間高次精度解析が望ましい

有限体積法における空間高次精度化

セル界面での物理量 U のフラックスを高次精度で計算

➤ 隣接セルの外側セルの情報により左右の物理量 U^L , U^R を再構築

例：2次精度の場合



最もシンプルな再構築法：

$$U_{i+1/2}^L = U_i + 0.5(U_i - U_{i-1})$$

$$U_{i+1/2}^R = U_{i+1} - 0.5(U_{i+2} - U_{i+1})$$

ただし、このままだと非物理的な振動を生じやすい

空間高次精度化における振動抑制法

① リミッタ型

TVD法 (Hartenら(1983)) :

$$U_{i+1/2}^L = U_i + 0.5\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{r}_i)(U_i - U_{i-1}) \quad \text{再構築の際にリミッタを入れる}$$

MP(Monotonicity-Preserving)法 (Sureshら(1997)) :

$$U_{i+1/2}^L = \text{clip}\left(U_{i+1/2}^L, \boldsymbol{f}_{\text{lower}}(\boldsymbol{U}), \boldsymbol{f}_{\text{upper}}(\boldsymbol{U})\right) \quad \text{再構築後の値にリミッタをかける}$$

② 再構築法の工夫

WENO法 (Jiangら(1996)) :

$$U_{i+1/2}^L = \sum_{j=0}^k w_j f_j(U_i)$$

一般に、水面形をシャープに保ちながら数値振動を抑制できる高次手法ほど計算コストが増加しやすい

Information Geometric Regularization

Caoら(2023)によるIGR (Information Geometric Regularization)

- 圧縮性オイラー方程式の圧力項に**正則化項 Σ** を追加
- リミッタ (TVD法, MP法) や複雑な再構築 (WENO法) なしで振動抑制可能

$$\partial_t \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho \end{pmatrix} + \nabla \cdot \begin{pmatrix} \rho u \otimes u + (P(\rho) + \Sigma) \mathbf{I} \\ \rho u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{圧縮性オイラー方程式}$$

$$\underbrace{\frac{\Sigma}{\rho}}_{\text{拡散項}} - \underbrace{\alpha \nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho} \nabla \Sigma \right)}_{\text{速度勾配が大きくなるほど大きくなる項}} = \alpha (\text{tr}^2([\mathbf{Du}]) + \text{tr}([\mathbf{Du}]^2)) \quad \text{正則化項}\Sigma\text{に関する式}$$

- **正則化項 Σ** は速度勾配の強さを検出して、それを滑らかに押し返す非局所的な圧力として**圧力項に加えられる補正項**

□ **IGRの適用例**：Wilfongら(2025):宇宙ロケットの大規模ジェット噴流解析

河川解析でよく使われる**浅水流方程式**も同じく**双曲型偏微分方程式**

- 浅水流方程式にも**IGR**を適用して、**高次精度解析における数値振動を低計算コストで抑制できるのでは？**

研究目的

1次元および2次元の**浅水流方程式**に対してIGRを適用し，高次精度解析における**数値振動を効果的に抑制**でき，かつWENO法等の従来手法と比較して**計算コストを下げる**ことができることを示し，今後の浅水流方程式による**河川流れの数値解法としてのIGRの有効性を示す**こと

IGRの浅水流方程式への適用

浅水流方程式は圧縮性ナビエストークス方程式において密度一定，鉛直方向の流速分布一様のもので，鉛直積分して圧力を水深 h (head) で表したもの

- 圧縮性オイラー方程式の圧力 p が h に対応
- 偏微分方程式同士のアナロジーによりIGRの正則化項 Σ を浅水流方程式に導入

IGRを適用した1次元2次元浅水流方程式

1次元：

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} + S = 0$$

$$U = \begin{pmatrix} h \\ uh \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} uh \\ u^2h + \frac{1}{2}gh^2 + \Sigma \end{pmatrix}$$

Σ入りの圧力項

$$S = \begin{pmatrix} 0 \\ -gh \left(-\frac{\partial z_b}{\partial x} - \frac{n^2 u |u|}{h^{\frac{4}{3}}} \right) \end{pmatrix}$$

$$\frac{\Sigma}{h} - \alpha \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{h} \frac{\partial \Sigma}{\partial x} \right) = 2\alpha \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2$$

Σの式

2次元：

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} + S = 0$$

$$U = \begin{pmatrix} h \\ uh \\ vh \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} uh \\ u^2h + \frac{1}{2}gh^2 + \Sigma \\ uvh \end{pmatrix}$$

Σ入りの圧力項

$$F = \begin{pmatrix} vh \\ uvh \\ v^2h + \frac{1}{2}gh^2 + \Sigma \end{pmatrix}$$

Σ入りの圧力項

$$S = \begin{pmatrix} 0 \\ -gh \left(-\frac{\partial z_b}{\partial x} - \frac{n^2 u \sqrt{u^2 + v^2}}{h^{\frac{4}{3}}} \right) \\ -gh \left(-\frac{\partial z_b}{\partial y} - \frac{n^2 v \sqrt{u^2 + v^2}}{h^{\frac{4}{3}}} \right) \end{pmatrix}$$

$$\frac{\Sigma}{h} - \alpha \nabla \cdot \left(\frac{1}{h} \nabla \Sigma \right) =$$

$$\alpha \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right]$$

Σの式

研究手法 比較手法

	手法名	高次空間再構築法	勾配制限	圧力項への Σ 追加
	IGR		なし	あり
	Unlimited	式(7a)または式(7b)による	なし	なし
TVD	minmod	多項式補間による高次空間	TVD法 (minmod)	なし
	MC	再構築	TVD法 (MC)	なし
	MP		MP法	なし
	WENO	WENO法による空間再構築	なし	なし

再構築多項式

1次元：

$$u_{i+1/2}^- = \frac{-u_{i-1} + 5u_i + 2u_{i+1}}{6}$$

$$u_{i+1/2}^+ = \frac{2u_i + 5u_{i+1} - u_{i+2}}{6}$$

2次元：

$$u_{i+1/2}^- = \frac{2u_{i-2} - 13u_{i-1} + 47u_i + 27u_{i+1} - 3u_{i+2}}{60}$$

$$u_{i+1/2}^+ = \frac{-3u_{i-1} + 27u_i + 47u_{i+1} - 13u_{i+2} + 2u_{i+3}}{60}$$

解析手法の詳細

- リーマンソルバとして**Lax-Friedrichs法**を使用
- 時間積分は**3次精度のルンゲクッタ法** (SSPRK3 (Strong Stability Preserving Runge Kutta)) を使用
- 静水状態を保つ性質 (well-balanced性) を満たすためにAudusseら (2004) のHR法 (Hydrostatic Reconstruction) を使用

$$h_L = \eta_L - \max(zb_L, zb_R) \quad h_R = \eta_R - \max(zb_L, zb_R)$$

- 正則化強度 α (m²)については格子幅 Δx の2乗に比例させて、 $\alpha = C\Delta x^2$ として与えることが推奨(Caoら(2023)). IGR係数 C は最も数値振動を抑えられる値として、1次元解析において3次精度では8, 5次精度では3, そして2次元では1とそれぞれ試行錯誤のうえ定めた.

$$\frac{\Sigma}{h} - \alpha \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{h} \frac{\partial \Sigma}{\partial x} \right) = 2\alpha \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \quad \text{1次元の}\Sigma\text{の式}$$

研究結果

平坦床における1次元ダムブレイク

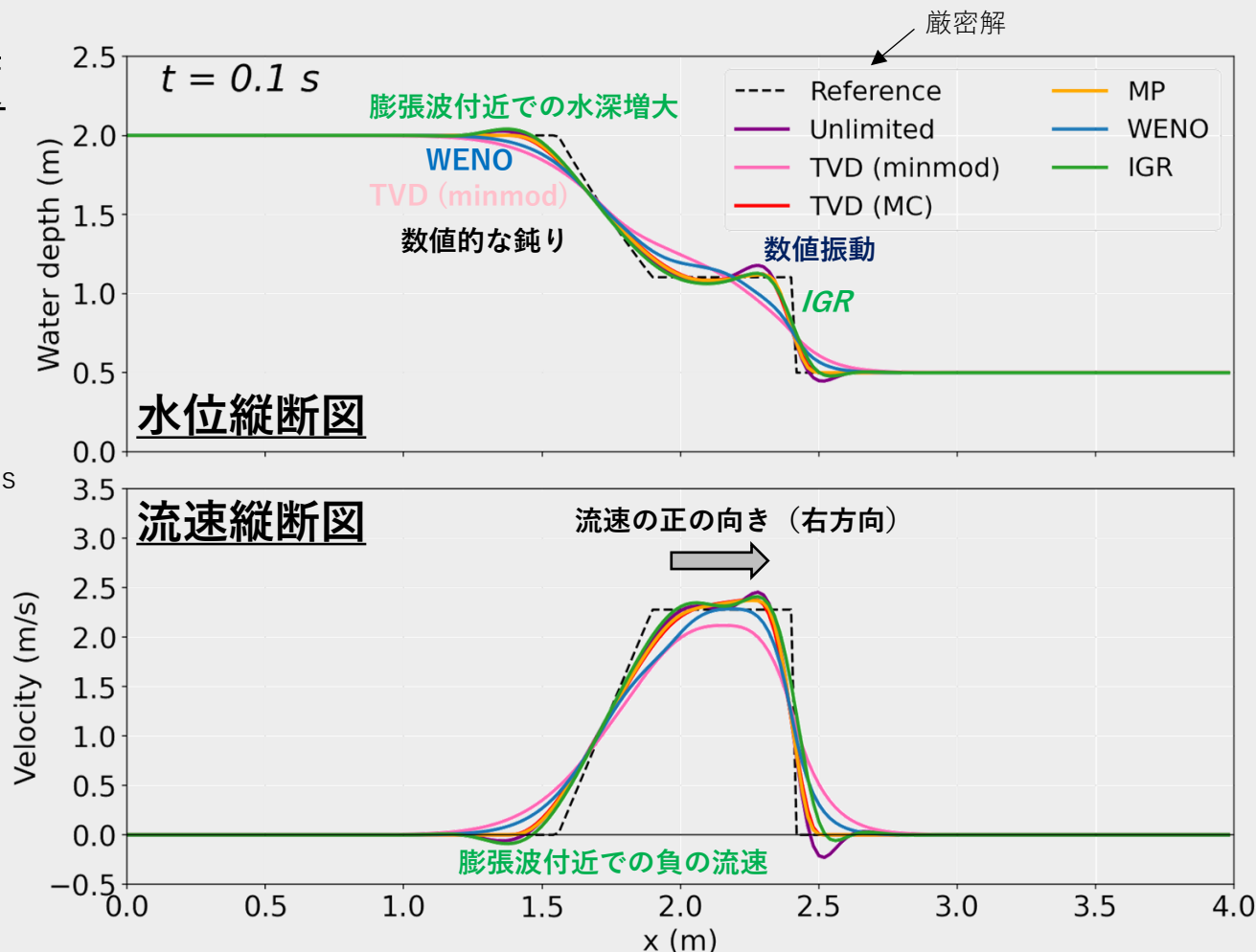
3次精度

解析諸元

Δx : 0.02 m

Δt : 1.0×10^{-4} s

粗度係数: 0
 $\text{s/m}^{1/3}$



研究結果

平坦床における1次元ダムブレイク

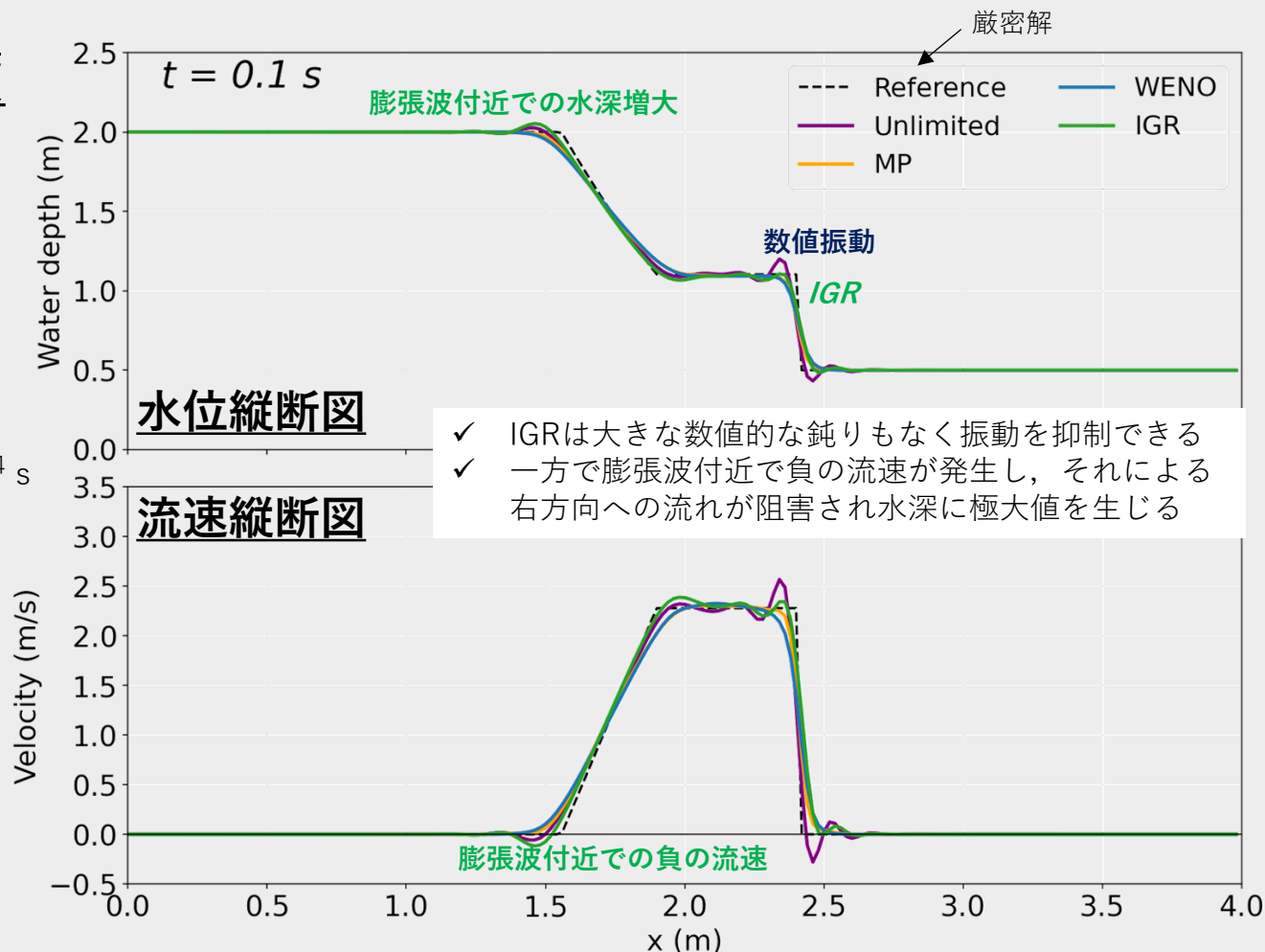
5次精度

解析諸元

Δx : 0.02 m

Δt : 1.0×10^{-4} s

粗度係数: 0
 $\text{s/m}^{1/3}$



研究結果

ハンプ付き床における1次元ダムブレイク

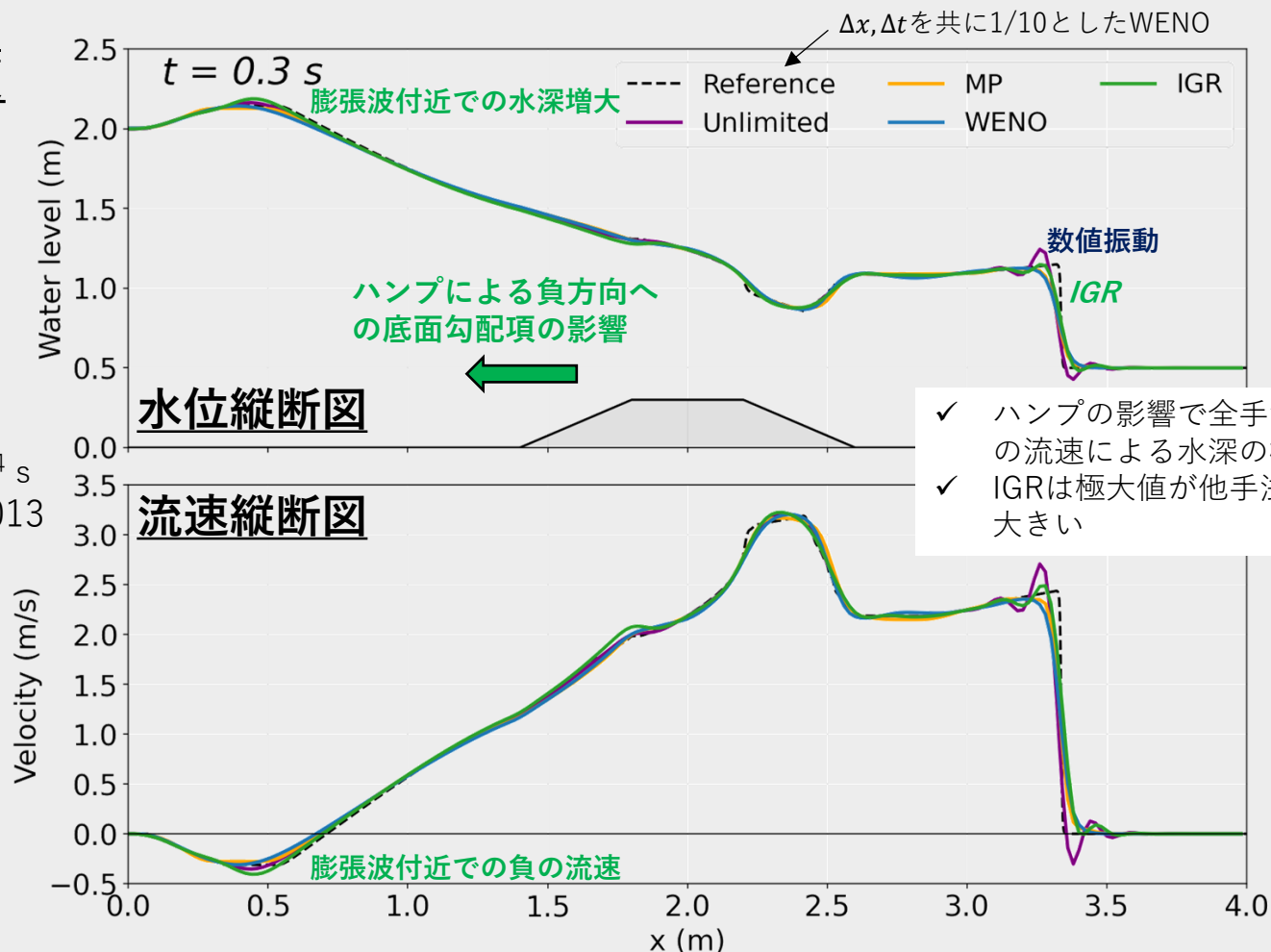
5次精度

解析諸元

Δx : 0.02 m

Δt : 1.0×10^{-4} s

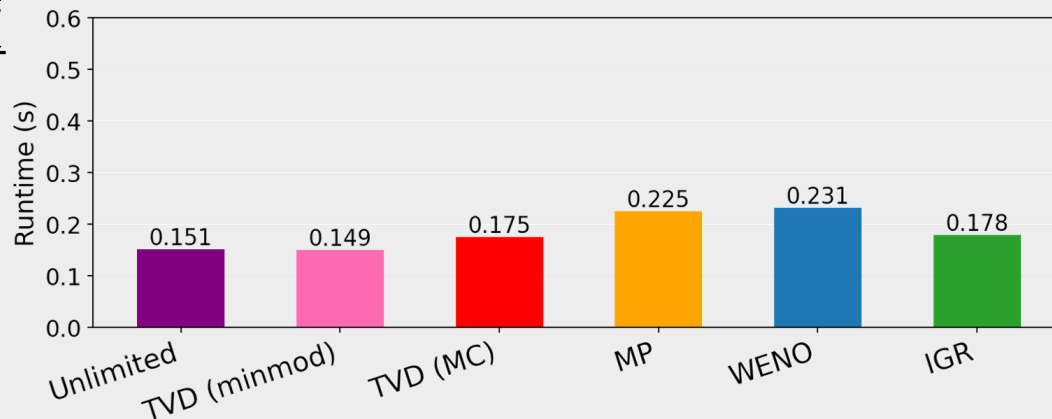
粗度係数: 0.013
 $\text{s/m}^{1/3}$



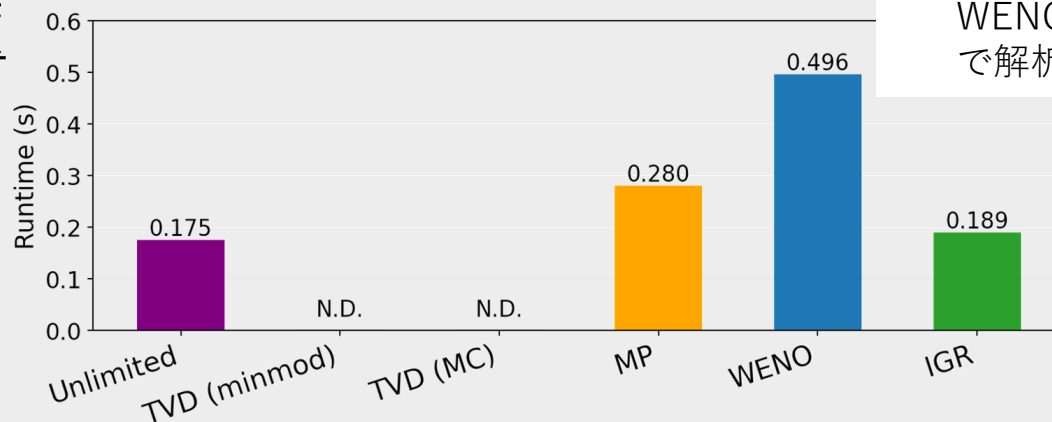
研究結果

解析所要時間の比較

3次精度



5次精度



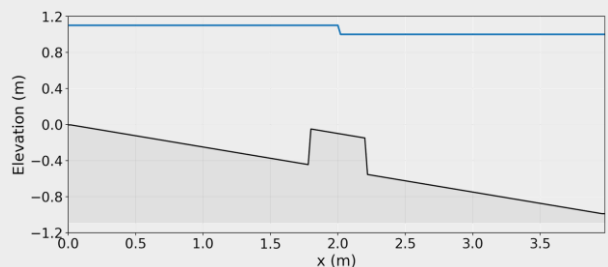
✓ 5次精度においてIGRはWENOの1/2以下の時間で解析可能

研究結果

Well-balanceテスト

浅水流方程式では静水時には圧力項と底面勾配項が釣り合うことで静水状態が保たれるが、IGRでは圧力項に Σ が含まれるためそれによってwell-balanceが崩れないかどうかをテスト

初期水位



マニング粗度起因する摩擦損失によって徐々に静水状態へと近づいていく

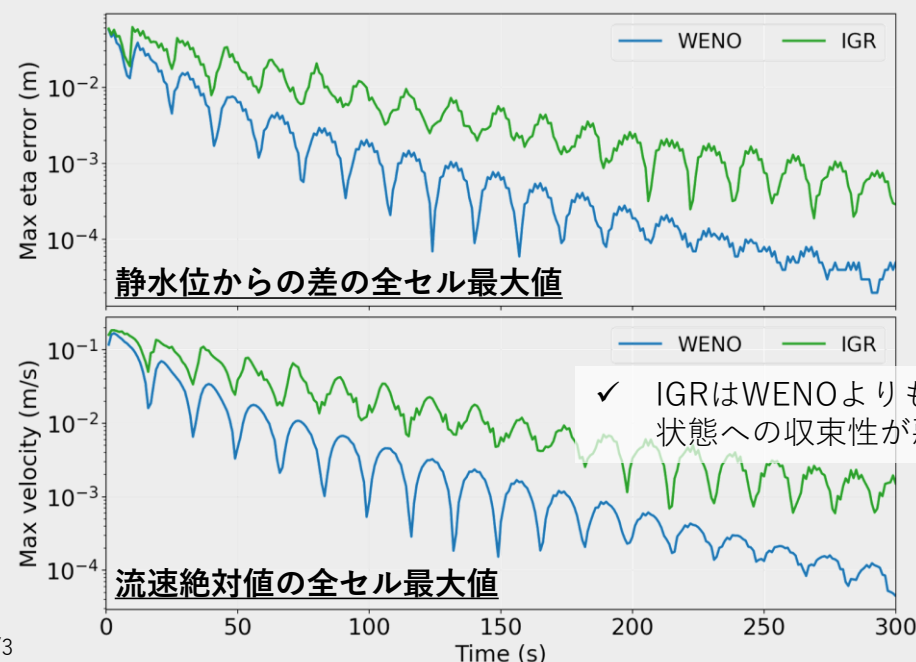
解析諸元

Δx : 0.02 m

Δt : 1.0×10^{-4} s

粗度係数: $0.03 \text{ s/m}^{1/3}$

水位と流速の静水時に対する差異の推移



研究手法

2次元ダムブレイク

スロープと障害物を有する領域におけるダムブレイクテスト

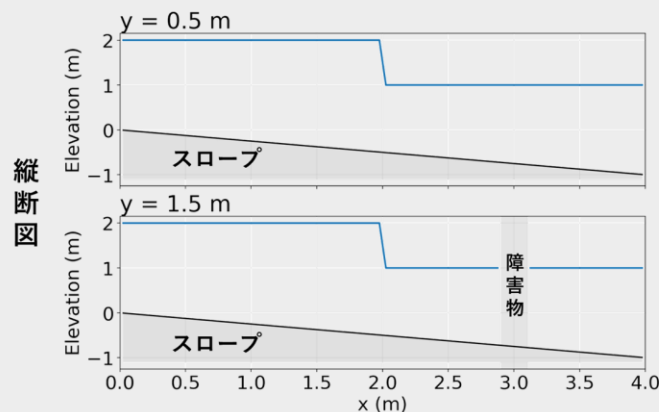
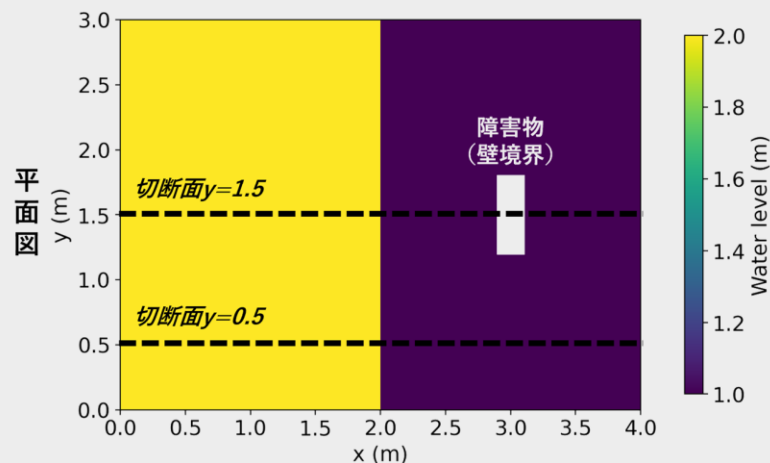
解析諸元

Δx : 0.05 m

Δt : 5.0×10^{-4} s

粗度係数: $0.013 \text{ s/m}^{1/3}$

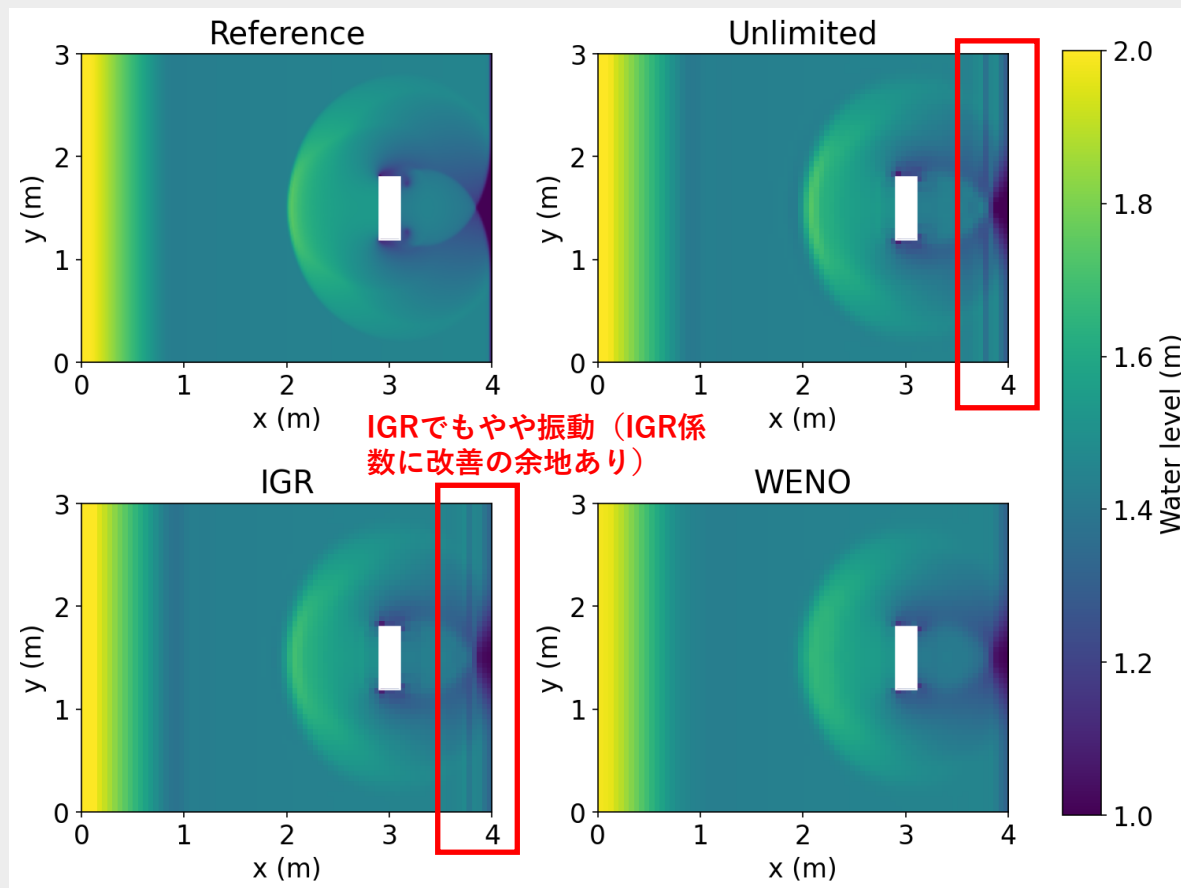
初期条件



研究結果

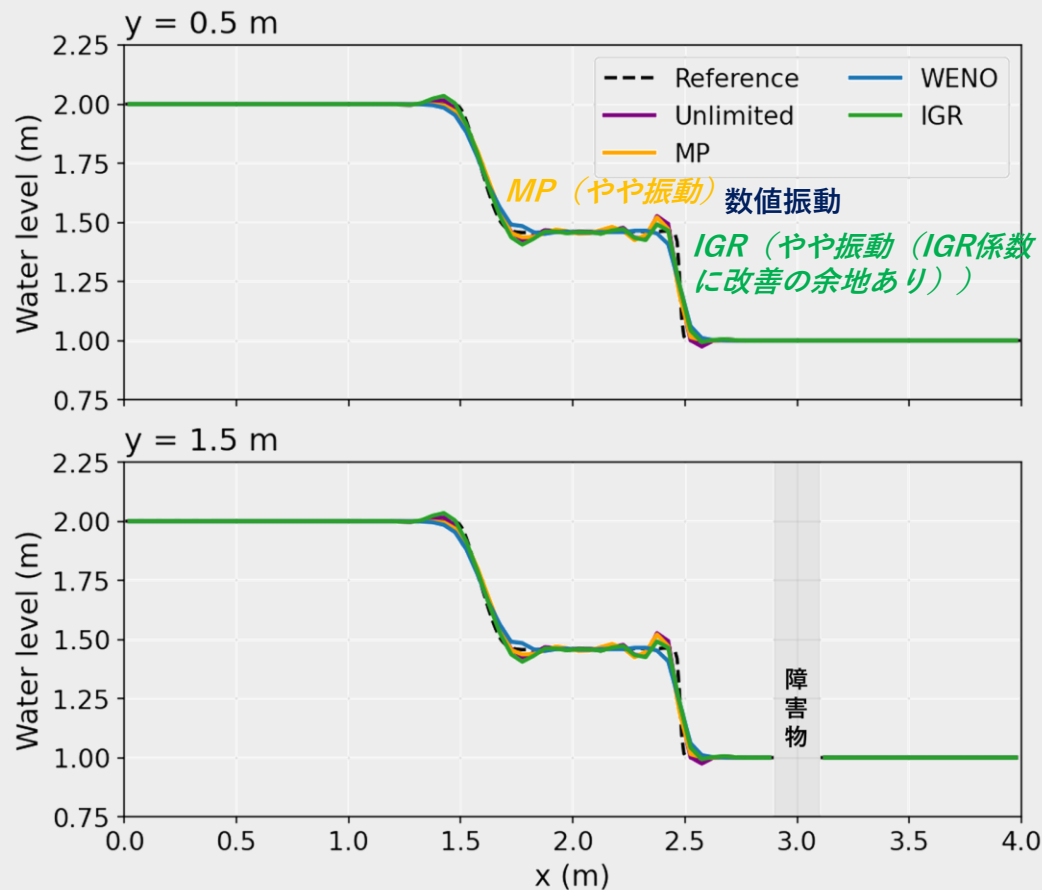
2次元水位分布

$t=0.4s$



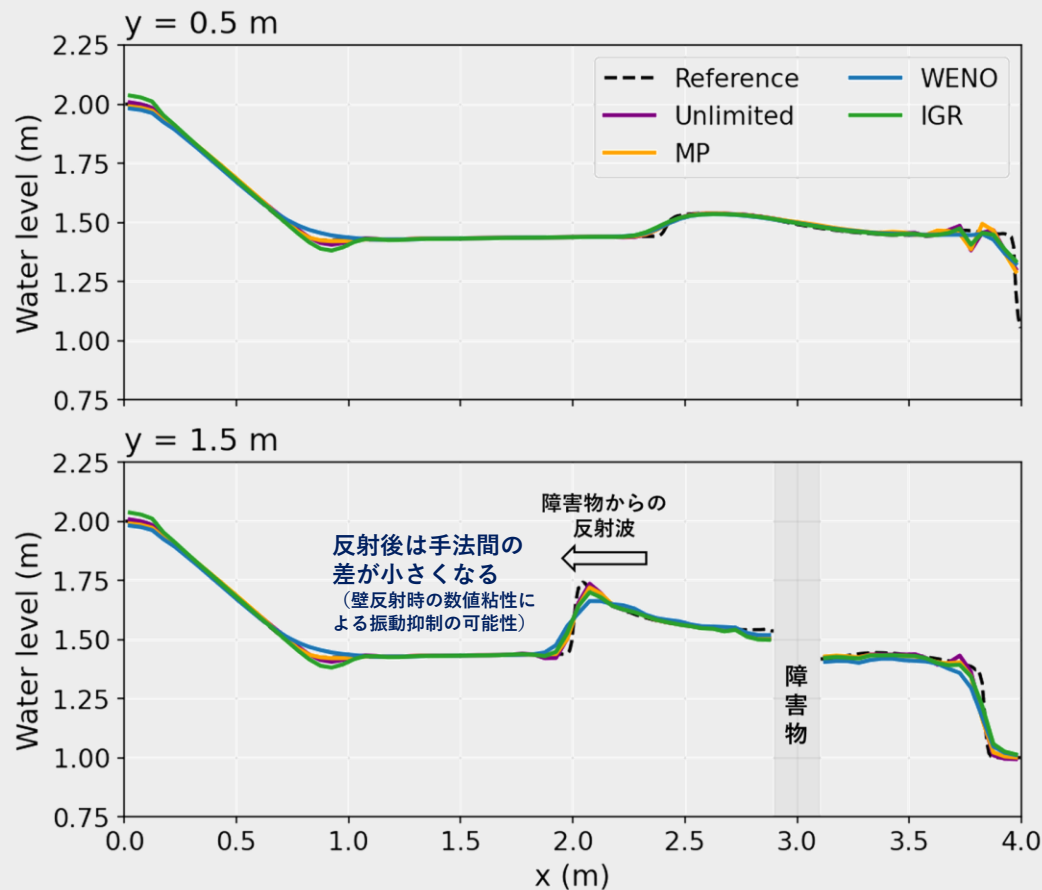
研究結果 水位縦断分布

$t=0.1s$



研究結果 水位縦断分布

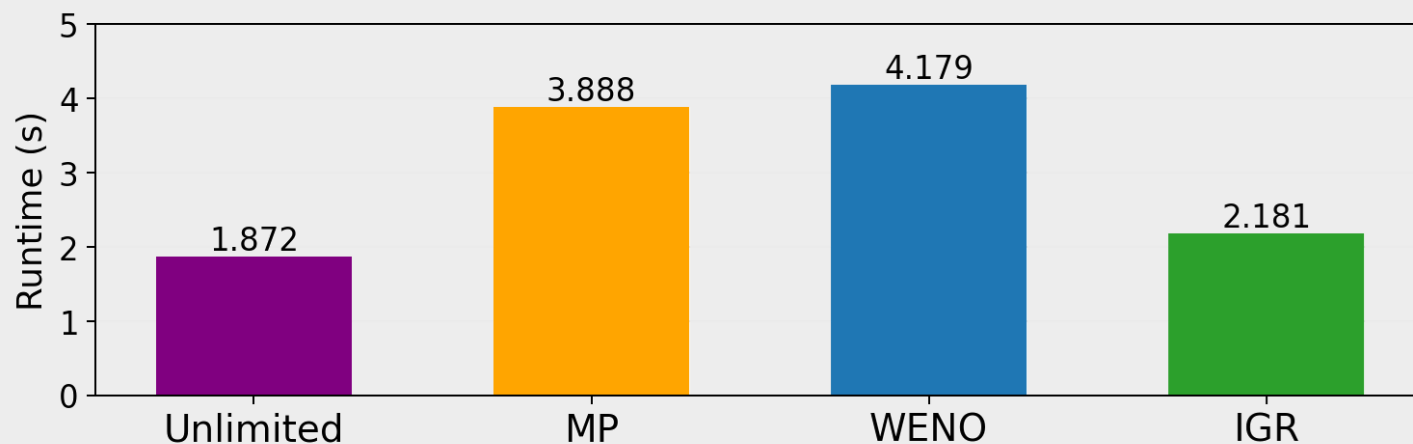
$t=0.4s$



研究結果

解析所要時間の比較

- ✓ IGRではWENO法およびMP法の半分程度の解析所要時間



まとめ

IGRの有用な点：

1. **IGR**は段波等の衝撃波様の流れにおいて**非物理的な数値振動を抑制**しつつ、**衝撃波面の形状を良好に保持**できることが確認された。
2. **計算コストはWENO法やMP法に比べて低く**，5次精度計算においてWENO法の5割程度の時間で解析できることが分かった．河川水位のリアルタイム予測，また多数の気象アンサンブルデータを基にした解析等において有用であると考えられる。

IGRの課題：

1. **膨張波付近における水深の過大評価**や，**静水状態への収束が遅い**傾向が見られる。
2. **IGR係数の設定方法についても定まっておらず**，現状は計算ケースごとの設定が必要である。

参考文献

1. Archer, D., Watkiss, S., Warren, S., Lamb, R., and Fowler, H. J.: Gauged and historical abrupt wave front floods ('walls of water') in Pennine rivers, northern England, *Journal of Flood Risk Management*, Vol.17(3), e12989, 2024.
2. Toro, E. F.: *Shock-capturing methods for free-surface shallow flows*, Wiley, 2001.
3. Toro, E. F.: *Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics: A practical introduction*, Springer, 2009.
4. Harten, A.: High resolution schemes for hyperbolic conservation laws, *Journal of Computational Physics*, Vol.49(3), pp.357-393, 1983.
5. Suresh, A., and Huynh, H. T.: Accurate monotonicity-preserving schemes with Runge-Kutta time stepping, *Journal of Computational Physics*, Vol.136, pp.83-99, 1997.
6. Jiang, G. S., and Shu, C. W.: Efficient implementation of weighted ENO schemes, *Journal of Computational Physics*, Vol.126(1), pp.202-228, 1996.
7. Moussa, R. and Bocquillon, C.: Criteria for the choice of flood-routing methods in natural channels, *Journal of Hydrology*, Vol.186, pp.1-30, 1996.
8. Teng, J., Jakeman, A.J., Vaze, J., Croke, B.F.W., Dutta, D. and Kim, S.: Flood inundation modelling: A review of methods, recent advances and uncertainty analysis, *Environmental Modelling & Software*, Vol.90, pp.201-216, 2017.
9. Noelle, S., Xing, Y., and Shu, C. W.: High-order well-balanced finite volume WENO schemes for shallow water equation with moving water, *Journal of Computational Physics*, Vol.226(1), pp.29-58, 2007.
10. Cao, R., and Schäfer, F.: Information geometric regularization of the barotropic Euler equation, arXiv preprint, arXiv:2308.14127, 2023.
11. Wilfong, B., Radhakrishnan, A., Le Berre, H., Vickers, D., Prathi, T., Tselepidis, N., Dorschner, B., Budiardja, R., Cornille, B., Abbott, S., Schäfer, F., and Bryngelson, S.: Simulating many-engine spacecraft: Exceeding 1 quadrillion degrees of freedom via information geometric regularization, *Proceedings of SC 2025*, pp.14-24, 2025.
12. Audusse, E., Bouchut, F., Bristeau, M. O., Klein, R., and Perthame, B.: A fast and stable well-balanced scheme with hydrostatic reconstruction for shallow water flows, *SIAM Journal on Scientific Computing*, Vol.25(6), pp.2050-2065, 2004.